7.ªs Olimpíadas Concelhias de Matemática no Algarve

Final do Barlavento

- Proposta de Resolução -

Categoria: A (7º, 8º e 9º ano)
23 de Março de 2011

Parte I: Escolha Múltipla

Soluções:

Questão	Resposta correcta
1.	**(A)**
2.	**(D)**
3.	**(B)**

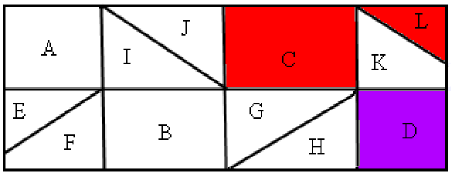
Cotação da Parte I:

		Erradas			
	N.º de respostas:	**0**	**1**	**2**	**3**
Certas	**0**	0	0	0	0
	1	5	4	3	
	2	10	9		
	3	15			

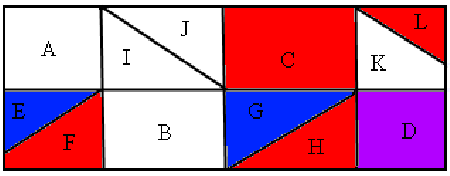
Proposta de resolução das questões da Parte I (Escolha Múltipla)

1.

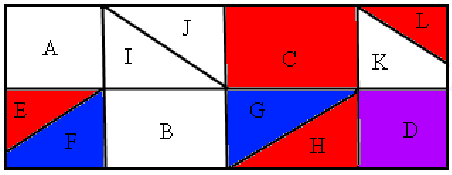
Das condições 3 e 4 sabemos que o mapa está colorido da forma:



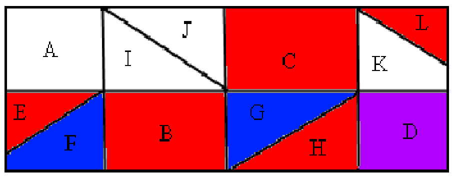
Da primeira condição, podemos colorir o mapa da forma:



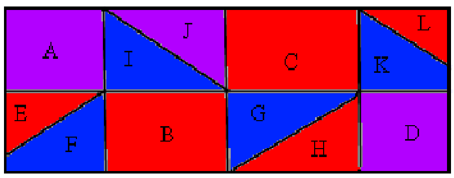
ou



Da condição 2, só pode resultar



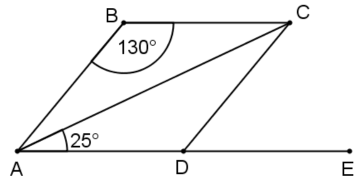
Como I não pode ser colorido a lilás, e faz fronteira com B, colorido a vermelho, então terá de ser colorido a azul. O mapa final é:



Resposta **(A)**

2. Podemos afirmar que $\measuredangle BCA = \measuredangle CAD = 25^{\circ}$, por serem ângulos entre paralelas. A soma dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$ é 180º, logo $\measuredangle BAC = 25^{\circ}$. Podemos concluir que o triângulo $[ABC]$ é isósceles e portanto todos os lados de paralelogramo são iguais.

O perímetro de $[ABCD]$ é 20 cm, então $\overline{AD} = 5\,cm$ e $\overline{AE} = 10\,cm$.



Resposta **(D)**

3.

$$10^{2011} - 2011 = 1\underbrace{000\cdots000}_{2011\ \text{zeros}} - 2011$$

$$\begin{array}{r} 1000\cdots00000000 \\ -\qquad\qquad 2011 \\ \hline 9999\cdots99997989 \end{array}$$

A soma dos algarismos é $2007 \times 9 + 7 + 9 + 8 + 9 = 18096$.

Resposta **(B)**

Parte II: Resposta Aberta

<u>Regras gerais para a correcção de todos os problemas</u>

- A resolução dum problema que contenha apenas a resposta correcta será cotada com **1 Ponto**
- A resolução dum problema que, na sequência dum raciocínio errado, apresenta a resposta correcta, será cotada com **0 Pontos**
- As resoluções elaboradas na base de raciocínios correctos, mas que contenham erros, serão avaliadas de acordo com os critérios adoptados pelos professores nomeados para a correcção do respectivo problema. Recomenda-se que cada erro menor seja penalizado em **1 Ponto**

Proposta de resolução do problema 4

Cotação: 10 Pontos

4. *A Carolina tem um saco com gomas de dois sabores: morango e ananás. Tirou 5 gomas de morango e 6 de ananás, colocou-as num frasco e ficou a brincar com elas.*

Tirou duas gomas do frasco e decidiu que:

- se as gomas fossem ambas de ananás, ela voltaria a colocar uma delas no frasco;

- se as gomas fossem de sabores diferentes ela voltaria a colocar uma de morango no frasco;

- se as gomas fossem ambas de morango, ela tirava uma goma de ananás do saco e colocava-a no frasco.

No final, apenas uma goma ficou no frasco. De que sabor é esta goma?

Proposta:

Verificamos que cada vez que a Carolina retira duas gomas do frasco volta a colocar uma, pelo que, o número de gomas no frasco diminui uma unidade.

Nos dois primeiros casos, o frasco passa a ter menos uma goma de ananás, e no terceiro caso, o frasco passa a ter menos duas gomas de morango e mais uma goma de ananás. Então o número de gomas de morango no frasco ou se mantém ou diminui 2 unidades. Como no início a Carolina tem 5 gomas de morango, o número de gomas de morango é sempre ímpar. Assim, todas as gomas de ananás desaparecem, mas fica uma de morango.

Critérios de correcção

Concluir que o número de gomas no frasco diminui em 1 unidade de cada vez que a Carolina retira gomas………………...........................	1 ponto
Concluir que o número de gomas de ananás no frasco ou diminui ou aumenta em uma unidade……………………………………………..	2 pontos
Concluir que o número de gomas de morango se mantém ou diminui 2 unidades …………………………………………………………	2 pontos
Concluir que como o número de gomas de morango no início é ímpar então no final resta uma goma de morango …………………………..	4 pontos
Resposta …………………………………………………………………	1 ponto

Proposta de resolução do problema 5

<u>**Cotação: 10 Pontos**</u>

5. *O Sr. Manuel é um electricista que presta serviços ao domicílio quando é contactado por uma drogaria. Em 2010, o Sr. Manuel dava à drogaria 20% do pagamento total que recebia por cada deslocação e ficava com 72 euros para ele. Em 2011 o Sr. Manuel passou a dar à drogaria 25% do pagamento total. Se o Sr. Manuel quiser continuar a ficar com 72 euros para ele por cada deslocação, qual é o aumento do preço do serviço prestado pelo Sr. Manuel?*

<u>**Proposta:**</u>

Se, em 2010, o Sr. Manuel dava à drogaria 20% do pagamento total, então ficava com 80% e cobrava pela deslocação uma quantidade x de euros, ou seja

$$\frac{4}{5}x = 72\text{, logo } x = 90\,.$$

Como, em 2011, o Sr. Manuel cobra pela deslocação uma quantidade y de euros passa a da à drogaria 25% do pagamento total, então ficará com 75%, ou seja

$$\frac{3}{4}y = 72 \text{ e portanto } y = 96\,.$$

Deste modo, o Sr. Manuel terá de aumentar o preço em 6 euros, passando de 90 para 96 euros.

<u>**Critérios de correcção:**</u>

Determinar o valor que o Sr. Manuel cobrava em 2010……………………… 4 pontos

Determinar o valor que o Sr. Manuel cobrará em 2011………………………. 4 pontos

Determinar o aumento do preço de 2010 para 2011 …………………………. 1 ponto

Resposta……………………………………………………………………….. 1 ponto

Proposta de resolução do problema 6

Cotação: 10 Pontos

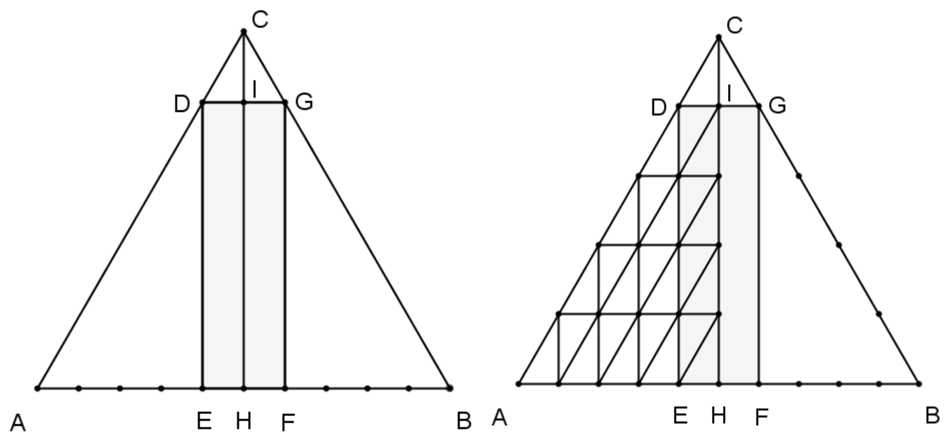
6. *Na seguinte figura os vértices do rectângulo estão sobre os lados do triângulo equilátero. A área do triângulo é 50 cm^2 e o menor dos lados do rectângulo é um quinto do lado do triângulo.*

Qual é a área do rectângulo sombreado?

Primeira Proposta:

A altura do triângulo traçada em relação a C é um eixo de simetria do triângulo [ABC], pelo que divide este em dois triângulos ([AHC] e [BCH]) congruentes, logo com a mesma área ($25\ cm^2$).

Os triângulos rectângulos [AHC] e [DIC] são semelhantes com razão de semelhança igual a 5. Logo o triângulo [AHC] pode ser dividido em 25 triângulos congruentes com [DIC], como mostra a figura.



Deste modo temos

$$A_{[DEHI]} = \frac{8}{25} A_{[AHC]} = 8\ cm^2 \text{ e } A_{[EFGD]} = 16\ cm^2 .$$

Critérios de correcção:

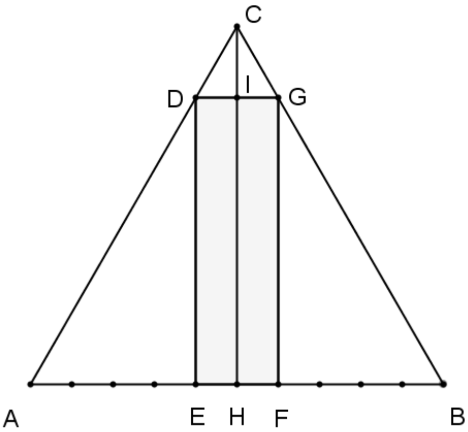
Mostrar que $A_{[AHC]} = 25\ cm^2$ ……………………………………….. 2 pontos

Mostrar que $A_{[AHC]} = 25 A_{[CDI]}$ ……………………………………… 3 pontos

Mostrar que $A_{[DEHI]} = \frac{8}{25} A_{[AHC]} = 8\ cm^2$ …………………………... 4 pontos

Determinar que $A_{[DEFG]} = 16\ cm^2$ …………………………………... 1 ponto

Segunda Proposta:



Os triângulos [*DGC*] e [*ABC*] são semelhantes (são ambos equiláteros) com razão de semelhança igual a 5. Logo

$$\overline{CI} = \frac{\overline{CH}}{5} \text{ e } \overline{DE} = \frac{4}{5}\overline{CH}$$

Portanto

$$A_{[EFGD]} = \overline{EF} \times \overline{DE} = \frac{1}{5}\overline{AB} \times \frac{4}{5}\overline{CH} = \frac{8}{25}A_{[ABC]} = 16\ cm^2 .$$

Critérios de correcção:

Justificar que os triângulos [*DGC*] e [*ABC*] são semelhantes ……….. 2 pontos

Concluir que $\overline{DE} = \frac{4}{5}\overline{CH}$ …………………………………………….. 3 pontos

Mostrar que $A_{[EFGD]} = \frac{8}{25}A_{[ABC]}$ ………………………….................... 4 pontos

Resposta………………………………... 1 ponto